1.4. Предельные точки и условие сходимости ЧП

План

1. Два варианта определения предельной точки ЧП
2. Верхний и нижний пределы ЧП
3. Лемма о выделении сходящейся подпоследовательности из ЧП, имеющей предельную точку
4. Лемма о предельной точке сходящейся ЧП
5. Утверждение о сходимости подпоследовательности сходящейся ЧП
6. Теорема о существовании предельной точки у ограниченной ЧП

Пусть $\{x_n\}$ – некоторая ЧП. Рассмотрим произвольную возрастающую последовательность, состоящую из целых положительных чисел $k_1, k_2, \dots, k_p, \dots$ Выберем из ЧП $\{x_n\}$ элементы с номерами $k_1, k_2, \dots, k_p, \dots$ и расположим их в том же порядке: $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_p}, \dots$

Полученную ЧП будем называть **подпоследовательностью** ЧП $\{x_n\}$. Сама ЧП $\{x_n\}$ может рассматриваться как подпоследовательность относительно самой себя с $k_n = n$.

Утверждение 1. Если ЧП $\{x_n\}$ сходится к пределу a, то и любая подпоследовательность этой ЧП сходится к тому же пределу a.

В самом деле, так как $\{x_n\}$ есть сходящаяся ЧП и a – её предел, то $\forall \varepsilon > 0$ можно указать номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n \geq N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Пусть $\{x_{k_n}\}$ – некоторая подпоследовательность ЧП $\{x_n\}$. Так как $k_n \geq N$, то, начиная с номера k_N, элементы подпоследовательности $\{x_{k_n}\}$ удовлетворяют неравенству $|x_{k_n} - a| < \varepsilon$. Поэтому подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ сходится к a.

Справедливо и обратное утверждение 2. Если все подпоследовательности данной ЧП $\{x_n\}$ сходятся, то пределы всех этих подпоследовательностей равны одному и тому же числу a; в частности, к этому же числу сходится и ЧП $\{x_n\}$.

Действительно, так как ЧП $\{x_n\}$ сходится к пределу a, как подпоследовательность ЧП $\{x_n\}$, то любая другая подпоследовательность также сходится и имеет тот же предел a.

Подпоследовательности ББЧП обладают аналогичным свойством: каждая подпоследовательность ББЧП также будет ББЧП. Доказательство аналогично доказательству первого утверждения. Отметим, что из каждой ББЧП можно выделить монотонную ББЧП.

Замечание. Из каждой сходящейся ЧП можно выделить монотонную сходящуюся ЧП.

Число x называется **предельной точкой** ЧП $\{x_n\}$, если в любой ε-окрестности этой точки имеется бесконечно много элементов ЧП $\{x_n\}$.

Замечание. Понятие предельной точки шире понятий точной верхней или нижней граней. Последние могут являться предельными точками, но ЧП может иметь и другие. Например, ЧП $1,2,3,1,2,3,\ldots$ имеет предельные точки $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$; первая и последняя являются соответственно точной нижней и точной верхней гранями этой ЧП. Видно, что ЧП, имеющая более одной предельной точки, не является сходящейся.

Лемма 1.2. Если x – предельная точка ЧП $\{x_n\}$, то из этой ЧП можно выделить подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, сходящуюся к числу x.

Доказательство. Рассмотрим систему -окрестностей точки x, для которой величина ε последовательно равна $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ В первой из этих окрестностей выберем элемент x_{k_1} ЧП $\{x_n\}$, во второй – элемент x_{k_2} такой, что $k_2 > k_1$, в третьей – элемент x_{k_3} такой, что $k_3 > k_2$. Этот процесс можно продолжать неограниченно, так как в любой ε-окрестности точки x имеется бесконечно много элементов ЧП $\{x_n\}$. В результате получим подпоследовательность $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$ ЧП $\{x_n\}$, которая сходится к точке x, так как $\left|x_{k_n} - x\right| < \frac{1}{n}$. Лемма доказана.

Замечание. Справедливо обратное утверждение: если из ЧП $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к числу x, то x является предельной точкой ЧП $\{x_n\}$. Действительно, в любой ε-окрестности точки x имеется бесконечно много элементов выделенной подпоследовательности, а стало быть, и самой ЧП $\{x_n\}$.

Итак, можно дать эквивалентное определение предельной точки: число x называется **предельной точкой** ЧП $\{x_n\}$, если из этой ЧП можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к x.

Лемма 1.3. Каждая сходящаяся ЧП имеет только одну предельную точку, совпадающую с пределом этой ЧП.

Доказательство. Предел a сходящейся ЧП $\{x_n\}$ является её предельной точкой, поскольку в любой ε-окрестности точки a содержатся все элементы ЧП, начиная с номера $N(\varepsilon)$. Убедимся, что у сходящейся ЧП нет других предельных точек. Действительно, пусть b – предельная точка сходящейся ЧП $\{x_n\}$. В силу леммы 1.2 из ЧП $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, сходящуюся к b, но любая подпоследовательность ЧП $\{x_n\}$ имеет предел a (согласно утверждению 1), и поэтому $b = a$. Лемма доказана.

Теорема 1.16. У всякой ограниченной ЧП существует хотя бы одна предельная точка.

Доказательство. Так как ЧП $\{x_n\}$ ограничена, то существуют вещественные числа m и M такие, что все элементы x_n удовлетворяют неравенствам: $m \leq x_n \leq M$. Рассмотрим множество $\{x\}$ вещественных чисел таких, что правее каждого из этих чисел либо вовсе нет элементов x_n, либо таких элементов лишь конечное число. Множество $\{x\}$ имеет хотя бы один элемент (например, число M) и ограничено снизу (любым числом, меньшим m). Следовательно, у множества $\{x\}$ существует точная нижняя грань, которую обозначим через $\overline{x}$ (целесообразность такого обозначения выяснится ниже).

Это число $\overline{x}$ является предельной точкой ЧП $\{x_n\}$. В самом деле, возьмём любое число $\varepsilon > 0$. Число $\overline{x} - \varepsilon$ заведомо не принадлежит множеству $\{x\}$, а поэтому правее числа $\overline{x} - \varepsilon$ лежит бесконечно много элементов $\{x_n\}$, то есть $\overline{x}$ является предельной точкой ЧП $\{x_n\}$.

Теорема доказана.

Замечание 1. В области $x_n \geq x$, где $x > \overline{x}$, может содержаться лишь конечное число элементов ЧП $\{x_n\}$, поэтому в этой области не может быть других предельных точек.

Наибольшая предельная точка $\overline{x}$ ЧП $\{x_n\}$ называется **верхним пределом** этой ЧП и обозначается символом $\overline{x} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Согласно сделанному к теореме 1.16 замечанию 1 у всякой ограниченной ЧП существует верхний предел.

Совершенно аналогично вводится понятие **нижнего предела** $\underline{x}$, как наименьшей предельной точки ЧП $\{x_n\}$. Нижний предел обозначается символом $\underline{x} = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Существование нижнего предела у любой ограниченной ЧП доказывается в полной аналогии с теоремой 1.16.

Итак, приходим к следующему утверждению: у всякой ограниченной ЧП существуют верхний и нижний пределы.

Очевидны два следствия из теоремы 1.16:

Следствие 1. Если (a, b) – интервал, вне которого находится лишь конечное число элементов ограниченной ЧП $\{x_n\}$, а $\underline{x}$ и $\overline{x}$ – нижний и верхний пределы этой ЧП, то интервал $(\underline{x}, \overline{x})$ содержится в (a, b) и поэтому $\overline{x} - \underline{x} \leq b - a$.

Следствие 2. Для любого $\varepsilon > 0$ интервал $(\underline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$ содержит все элементы ограниченной ЧП $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$.

Замечание 2. Из приведённого в связи с определением предельной точки примера видно, что число предельных точек может быть более двух. Можно показать, что ЧП может иметь бесконечно много предельных точек.

Основная литература:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Часть I. Учеб.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 648 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Часть II. Учеб.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие. – СПб., Изд-во «Профессия», 2005. – 432 с.

Дополнительная литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1,2,3. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 592 с.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Уч. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 656 с.